1.14 La formule des compléments (235, 236, 239, 244, 245)

Une formule sympathique pour la fonction spéciale préférée des profs de prépa : la fonction Γ d'Euler ! Cette formule permet de prouver que ζ vérifie une équation fonctionnelle, qui permet de la prolonger sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Théorème 1.19 (Formule des compléments)**.** Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. Étant donné que la fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$, on a que le membre de droite définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Le membre de gauche est également une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Cet ensemble est connexe et on peut donc prouver cette égalité uniquement sur l'intervalle $(0,1)$ par exemple (l'intérêt étant que le membre de droite y a une expression intégrale explicite) et conclure par principe des zéros isolés. Soit alors $s \in (0,1)$. On a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(1-s) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{+\infty} x^{-s}e^{-x}\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u^{-s}e^{-u}\mathrm{d}u\right)x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} v^{-s}e^{-xv}\mathrm{d}v\right)e^{-x}\mathrm{d}x && \text{par changement de variable } u = xv. \\
&= \int_0^{+\infty} v^{-s}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x(v+1)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}v && \text{par Fubini-Tonnelli (tout est positif).} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{-s}}{1+v}\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{v^{s-1}}{1+v}\mathrm{d}v && \text{par symétrie } s \leftrightarrow 1-s. \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{st}}{1+e^t}\mathrm{d}t && \text{par changement de variable } v = e^t.
\end{aligned}$$

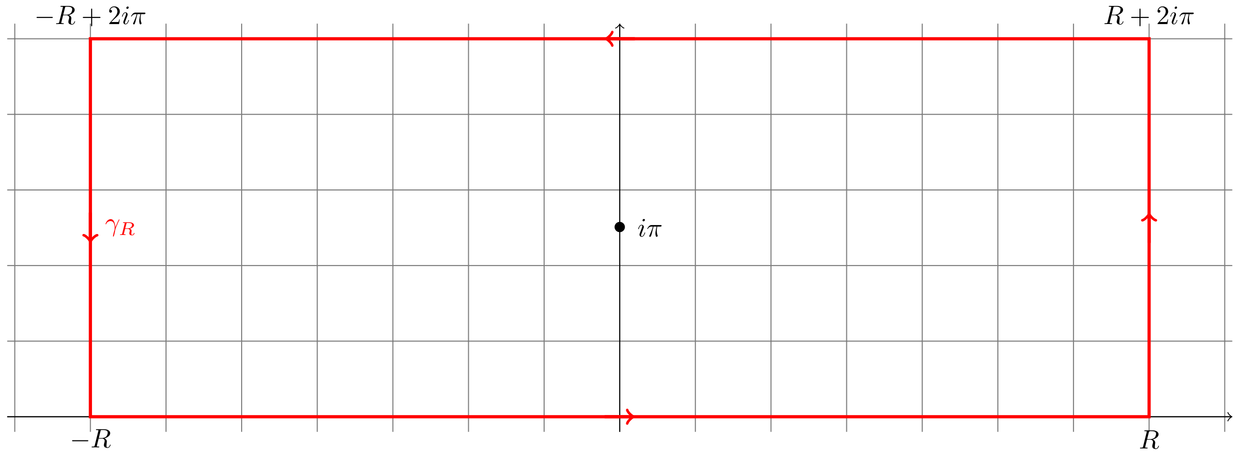
On est dans une bonne posture pour appliquer le théorème des résidus ! Posons la fonction complexe :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & z & \longmapsto & \dfrac{e^{sz}}{1+e^z}. \end{array}$$

Cette fonction est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (i\pi + 2i\pi\mathbb{Z})$. Les singularités de cette fonction sont des pôles simples, et on a :

$$\mathrm{Res}_{i\pi}(f) = \lim_{z \to i\pi} e^{sz}\frac{z - i\pi}{e^z - e^{i\pi}} = \frac{e^{is\pi}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(e^z\right)_{|z=i\pi}} = -e^{is\pi},$$

de sorte que, si $R \geqslant 2$, l'intégrale de f sur le contour γ_R suivant :



est égale à $-2i\pi e^{is\pi}$. Cependant, on a également :

$$\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+it)}}{1+e^{R+it}} i\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} \frac{e^{s(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}} i\mathrm{d}t.$$

Et on observe que :

1. On a :

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} \Gamma(s)\Gamma(1-s)$$

2. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\left|\frac{e^{s(R+it)}}{1+e^{R+it}}\right| = e^{sR}\left|\frac{1}{1+e^{R+it}}\right| \leqslant \frac{e^{sR}}{e^R-1} \underset{R\to+\infty}{\sim} e^{(s-1)R} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

car on a supposé $s < 1$. Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+it)}}{1+e^{R+it}} i\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\pi\frac{e^{sR}}{e^R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

3. Étant donné que $e^{2i\pi} = 1$, on reconnaît :

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{s(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}\mathrm{d}x = e^{2is\pi}\int_{-R}^{R} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\mathrm{d}x \xrightarrow[R\to+\infty]{} e^{2is\pi}\Gamma(s)\Gamma(1-s).$$

4. Enfin, de même que pour la deuxième intégrale, on a, pour tout $t \in [0, 2\pi]$:

$$\left|\frac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}}\right| = e^{-sR}\left|\frac{1}{1+e^{-R+it}}\right| \leqslant \frac{e^{-sR}}{1-e^{-R}} \underset{R\to+\infty}{\sim} e^{-sR} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

car on a supposé $s > 0$. Ainsi, par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}} i\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\pi\frac{e^{-sR}}{1-e^{-R}} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0.$$

En faisant tendre R vers $+\infty$ dans l'égalité :

$$-2i\pi e^{is\pi} = \int_{-R}^{R} \frac{e^{sx}}{1+e^x}\mathrm{d}x + \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(R+it)}}{1+e^{R+it}} i\mathrm{d}t - \int_{-R}^{R} \frac{e^{s(x+2i\pi)}}{1+e^{x+2i\pi}}\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \frac{e^{s(-R+it)}}{1+e^{-R+it}} i\mathrm{d}t,$$

on obtient donc :

$$-2i\pi e^{is\pi} = \left(1 - e^{2is\pi}\right)\Gamma(s)\Gamma(1-s).$$

Ainsi :

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{-2i\pi e^{is\pi}}{1 - e^{2is\pi}} = \frac{-2i\pi}{e^{-is\pi} - e^{is\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$

Cela conclut donc la preuve ! $\square$